Θεωρία Αριθμών

Συμβολισμός

$\mathbb{Z}$ = σύνολο ακεραίων = $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$

Θετικοί ακέραιοι = $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Μη αρνητικοί ακέραιοι = $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Ορισμός: Ένα μη κενό υποσύνολο $S$ του $\mathbb{R}$ λέγεται

(i) Φραγμένο κάτω, αν $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq s \ \forall s \in S$

(ii) Φραγμένο άνω, αν $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ ώστε $s \leq k \ \forall s \in S$

π.χ. Το $\mathbb{N}$ είναι φραγμένο κάτω, αλλά όχι φραγμένο άνω.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

(i) Κάθε μη κενό φραγμένο κάτω υποσύνολο $S$ του $\mathbb{Z}$ έχει ΕΛΑΧΙΣΤΟ στοιχείο. Δηλαδή $\exists\, k_0 \in S$ ώστε $k_0 \leq s \ \forall s \in S$

(ii) Κάθε μη κενό φραγμένο άνω υποσύνολο $S$ του $\mathbb{Z}$ έχει ΜΕΓΙΣΤΟ στοιχείο. Δηλαδή $\exists\, k_1 \in S$ ώστε $s \leq k_1 \ \forall s \in S$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Προσοχή, η πρόταση δεν ισχύει πάντα για μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Για πχ:

Αν $S = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ το $S$ είναι φραγμένο κάτω (πχ από το 0) κ' φραγμένο άνω, αλλά δεν έχει ΕΛΑΧΙΣΤΟ στοιχείο, ούτε έχει ΜΕΓΙΣΤΟ στοιχείο.

(πχ γιατί αν $a \in (0,1)$ τότε $\frac{a}{2} \in (0,1)$ κ' $\frac{a}{2} < a$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν $k_1 \neq k_2$ ακέραιοι, τότε $|k_2 - k_1| \geq 1$ με ισότητα αν $k_2 = k_1 + 1$ ή $k_1 = k_2 + 1$

Όταν δεν ισχύει η ισότητα έχουμε $|k_2 - k_1| \geq 2$

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Θεώρημα. Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $1 \in S$ κ' αν $k \in S$ τότε $k+1 \in S$. Τότε $S = \mathbb{N}$

Απόδειξη: Έστω ότι $S \neq \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathbb{N} \setminus S$ είναι μη κενό. Από πρόταση $\exists$ ελάχιστο στοιχείο $k_0 \in \mathbb{N} \setminus S$. Αφού $k_0 \notin S$ κ' $1 \in S$ έχουμε $k_0 \neq 1$. Συνεπώς $k_0 - 1 \in \mathbb{N}$ κ' αφού $k_0 - 1 < k_0$ έπεται $k_0 - 1 \in S$. Άρα από υπόθεση κ' $(k_0 - 1) + 1 \in S$, συνεπώς $k_0 \in S$ αντίφαση

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Με άλλα λόγια, η πρόταση μας λέει ότι το $\mathbb{N}$ είναι το ελάχιστο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ με τις ιδιότητες $1 \in \mathbb{N}$ κ' αν $k \in \mathbb{N}$ τότε κ' $k+1 \in \mathbb{N}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ πρόταση. Αν δείξουμε ότι:

Βήμα 1 $P(1)$ είναι αληθής κ'

Βήμα 2 Υποθέτουμε $n \in \mathbb{N}$ κ' $P(n)$ αληθής κ' δείξουμε ότι $P(n+1)$ αληθής.

Τότε από το θεώρημα έπεται $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$

π.χ. δ.ο. $1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη: Θέτουμε $P(n)$ για $n \in \mathbb{N}$ την πρόταση

$P(n)$: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Βήμα 1º: Η $P(1)$ είναι αληθής, γιατί $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

Βήμα 2º: Έστω $n \in \mathbb{N}$, κ' υποθέτουμε ότι η $P(n)$ ισχύει. Νδο ότι $P(n+1)$ ισχύει

Δηλαδή ότι $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Πράγματι $1+2+\ldots+(n+1) = (1+2+\ldots+n)+(n+1) \overset{\text{Υπόθεση } P(n) \text{ ισχύει}}{=}$

$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

~~Άρα η $P(n)$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$~~

Άρα $P(n+1)$ ισχύει. Συν συμπέρασμα από τα Βήματα 1 κ' 2 έπεται ότι η $P(n)$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$

Φυλλάδιο 3 άσκ 2

Δείξτε ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $1+3+5+7+\dots+(2\nu-1)=\nu^2$ (*)

Απόδειξη Θέτουμε για $\nu\in\mathbb{N}$, $P(\nu)$ την πρόταση (*)

Βήμα 1ο: Για $\nu=1$ η (*) γίνεται $1=1^2$ που ισχύει

Βήμα 2ο: Έστω $\nu\in\mathbb{N}$ κ' υποθέτουμε ότι η $P(\nu)$ ισχύει. Δ.ο η $P(\nu+1)$ ισχύει, δηλαδή ότι $1+3+5+\dots+(2(\nu+1)-1)=(\nu+1)^2$

Πράγματι,

$$1+3+\dots+(2\nu-1)+(2\nu+1)=(1+3+\dots+(2\nu-1))+(2\nu+1)\overset{\text{από υπόθεση } P(\nu) \text{ ισχύει}}{=}\nu^2+2\nu+1=(\nu+1)^2$$

Άρα η $P(\nu+1)$ ισχύει. Σύμφωνα από τα βήματα 1 κ' 2 έχουμε ότι η $P(\nu)$ ισχύει $\forall \nu\in\mathbb{N}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $k_0$ ακέραιος κ' $P(\nu)$ μία πρόταση για $\nu\ge k_0$. Αν κάνουμε τα ακόλουθα βήματα:

(i) Δείξουμε $P(k_0)$ ισχύει

(ii) Υποθέτουμε $\nu\in\mathbb{Z}$ ακέραιους με $\nu\ge k_0$ κ' $P(\nu)$ ισχύει κ' δείξουμε ότι $P(\nu+1)$ ισχύει, τότε έπεται $P(\nu)$ ισχύει $\forall \nu\ge k_0$.

π.χ. Έστω $x\in\mathbb{R}$ με $0<x<1$. Δείξτε $(1-x)^\nu>1-\nu\cdot x$ $\forall \nu\ge 2$

Απόδειξη: Θέτουμε $k_0=2$, $P(\nu)$ την πρόταση $(1-x)^\nu>1-\nu\cdot x$ για $\nu\ge 2$.

Βήμα 1ο: $P(2)$, δηλαδή $P(k_0)$ ισχύει, γιατί

$P(2)$ $(1-x)^2>1-2x$ κ' έχουμε $(1-x)^2=1-2x+x^2$ κ'

$x>0$, άρα $x^2>0$ συνεπώς $1-2x+x^2>1-2x$

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε $\nu\in\mathbb{Z}$ με $\nu\ge 2$ κ' ότι $P(\nu)$ ισχύει. Δ.ο $P(\nu+1)$ ισχύει δηλαδή ότι $(1-x)^{\nu+1}>1-(\nu+1)x$

Πράγματι,

$$(1-x)^{\nu+1}=(1-x)^\nu(1-x)\overset{\text{Επαγωγική υπόθεση}}{>}(1-\nu x)(1-x)=;$$

$= 1-(n+1)x+n^2 > 1-(n+1)x$, γιατί $nx^2 > 0$

Συνεπώς, δείξαμε ότι η $P(n+1)$ ισχύει. Στη συνέχεια, από τα βήματα 1 κ' 2 έχουμε ότι η $P(n)$ ισχύει $\forall n \geq 2$

## ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Θεώρημα: Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $b \neq 0$. Τότε $\exists$ μοναδικοί ακέραιοι $q, r$ ώστε

$$a = qb + r \quad κ' \quad 0 \leq r \leq |b|-1$$

π.χ. 1) Αν $a=5, b=2$ βλέπουμε ότι για $q=2, r=1$ $a=qb+r$ κ' $0 \leq r \leq 1 = |b|-1$

2) Έστω $a=5, b=-2$ βλέπουμε ότι για $q=-2$ κ' $r=1$ $a=qb+r$ κ' $0 \leq r \leq 1 = |b|-1$

3) Έστω $a=-5, b=2$ βλέπουμε ότι $q=-3$ κ' $r=1$ $a=qb+r$ κ' $0 \leq r \leq 1 = |b|-1$

4) $a=-5, b=-2$ βλέπουμε ότι για $q=3$ κ' $r=1$ $a=qb+r$ κ' $0 \leq r \leq |b|-1 = 1$